SF1624 Algebra och geometri

Andra föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

27 oktober, 2009

Polynomfunktioner

Definition (Polynomfunktion)

polynomfunktioner är de funktioner som kan fås med hjälp av funktionen $f(x) = x$ och de konstanta funktionerna genom addition och multiplikation.

Exempel

Några polynomfunktioner är

- $f(x) = x^3 + 3x + 1$
- $f(x) = x^{10} + \sqrt{3}x^2 + \pi$
- $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Räknelagar

Addtion och multiplikation av polynom uppfyller samma räknelagar som vi sett tidigare.
De speciella polynomen är nollpolynomet, 0, och det konstanta polynomet 1.

- $0 + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$, $1 \cdot f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)$
- $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$, $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$
- $f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x)$
- etc.

Grad

Vi kan ordna termerna i ett polyom

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

eller

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + \cdots + a_1 x^n$$

Definition (grad)

Den högsta potens av x som förekommer är polynomets grad.

Exempel

- $\text{grad}(x^3 + 3x + 1) = 3$
- $\text{grad}(x^{10} + \sqrt{2}x + \pi) = 10$
- $\text{grad}((x-1)(x-2)(x-3)(x-4)) = 4$
- konstanta polynom har grad 0.
- nollpolynomet har ingen grad (eller möjligen $-\infty$)

Divisionsalgoritm

Sats

Om $f(x)$ och $g(x)$ är polynom och $g(x) \neq 0$ finns en kvot $q(x)$ och en rest $r(x)$ så att

- $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$
- $r(x) = 0$ *eller* $\operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} g(x)$.

Exempel

Om $f(x) = x^2 + 3x + 1$ och $g(x) = x + 1$ har vi

$$f(x) = x^2 + 3x + 1 = (x+2)(x+1) - 1$$

och därmed är kvoten $q(x) = (x+2)$ och resten $r(x) = -1$.

Faktorsatsen

Definition

α är ett nollställe till polynomet $f(x)$ om $f(\alpha) = 0$. Då kallas $x = \alpha$ för en rot till polynomekvationen

$$f(x) = 0.$$

Sats (Faktorsatsen)

α är ett nollställe till polynomet $f(x)$ om och endast om $f(x)$ är delbart med $(x - \alpha)$.

Exempel

Vi såg att -1 inte är ett nollställe till $f(x) = x^2 + 3x + 1$ eftersom resten vid division med $(x + 1)$ var $r(x) = -1 \neq 0$. Däremot är -1 ett nollställe till $f(x) = x^3 - 1$ eftersom

$$f(x) = x^3 - 1 = (x^2 - x + 1)(x + 1).$$

Algebrans fundamentalsats

Sats

Varje polynom av grad minst ett har ett komplext nollställe.

Genom att använda detta tillsammans med faktorsatsen och polynomdivision får vi:

Korollarium

Varje polyom kan faktoriseras över de komplexa talen:

$$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

där $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *är komplexa tal.*

Reella polynom

Definition

Om koefficienterna i polynomet är reella tal kallas polynomet för ett reellt polynom.

Sats

De komplexa nollställena till ett reellt polynom förekommer i konjugerade par.

Bevis.

Vi kan se det genom att konjugera hela polynomet. Eftersom koefficienterna är reella är

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z})$$

och därmed är

$$f(z) = 0 \iff f(\overline{z}) = 0.$$

$\square$

Heltalspolynom

Definition

Om koefficienterna i polynomet är heltal kallas polynomet för ett heltalspolynom.

Sats

Om p/q är ett rationellt nollställe till ett heltalspolynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ och p och q saknar gemensamma delare så gäller att p delar a_0 och att q delar a_n.

Bevis.

Om vi sätter in $x = p/q$ och multiplicerar med q^n får vi ekvationen

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Alla termer delbara med p ger att a_0 måste vara delbar med p och alla termer delbara med q ger att a_n är delbar med q. $\square$